Normen in Diedererweiterungen von Zahlkörpern

Draxl, Peter K.

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 33, 1982, S.99-116

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Normen in Diedererweiterungen von Zahlkörpern

Von **Peter K. Draxl**, Bielefeld

Einleitung

Es sei Γ eine endliche abelsche Gruppe und $T = \{1, t\}$. Wir betrachten die zerfallende Gruppenerweiterung

(1) $\quad 1 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow G \rightleftarrows T \longrightarrow 1,$
wobei t *auf* Γ *via Inversenbildung operiere*

und nennen solch ein G *vom Diedertyp.* Wegen $(\sigma t)^2 = \sigma(t\sigma t) = \sigma\sigma^{-1} = 1$ ist dann $T_\sigma := \{1, \sigma t\}$ Untergruppe von G für jedes $\sigma \in \Gamma$.

Nun sei L/k eine Galoissche Erweiterung mit G = Gal(L/k) vom Diedertyp. Bezeichnet sodann K den Fixkörper von Γ und (für jedes $\sigma \in \Gamma$) ℓ_σ den von T_σ, so ergibt sich $N_{L/K}(\ell_\sigma^\times) \subset k^\times$, und folglich ist es sinnvoll, die Faktorgruppe

(2) $$J(L/k) := \{x \in L^\times \mid N_{L/K}(x) \in k^\times\} \Big/ \prod_{\sigma \in \Gamma} \ell_\sigma^\times$$

zu betrachten.

In der folgenden Arbeit werden nach einigen Vorbemerkungen (in §§ 1., 2.) die Gruppen J(L/k) gemäß (2) untersucht. Dabei zeigt sich ein enger Zusammenhang von J mit diversen Galoiskohomologiegruppen der Erweiterung L/k (vgl. § 4.), welcher allerdings erst nach einer naheliegenden Verallgemeinerung der gesamten Fragestellung (vgl. § 2.) in seiner vollen Kraft zur Geltung kommt. Für die (so verallgemeinerten) Gruppen J ergeben sich dabei Rechenregeln, welche formal den gewohnten Regeln aus der Tateschen Kohomologietheorie der endlichen Gruppen entsprechen (vgl. § 3., 6., 8., 11.).

Will man die Gruppen J gemäß (2) bei gegebenem L/k konkret bestimmen, so läuft dies (mit § 4.) auf die Kenntnis gewisser Größen in gewissen ersten und (-1)-ten Kohomologiegruppen hinaus; außer im Spezialfall, wo Γ in (1) zyklisch, als G *Diedergruppe* (im üblichen Sinne) ist (vgl. § 5.), kann allerdings J(L/k) bei beliebigem k allgemein nicht konkret berechnet werden. Anders im zahlentheoretischen Fall: bei *lokalem* (vgl. § 7.) resp. *globalem* (vgl. §§ 7., 9., 10., 12.) Grundkörper k gelingt eine solche Berechnung hingegen durch Einsatz der (kohomologischen Version der) Klassenkörpertheorie, im globalen Fall allerdings hier zunächst nicht in allen (für die bekannten Anwendungen aber ausreichend vielen) Fällen; vgl. näheres dazu in § 12.

Die Motivierung zu alle diesen Untersuchungen kam übrigens aus der Theorie der Schiefkörper mit Involution zweiter Art. Darauf wird in §§ 5., 10. am Rande kurz eingegangen.

§ 1. Gruppen vom Diedertyp und Diedererweiterungen

Die Gruppen vom Diedertyp sind schon in der Einleitung in (1) definiert worden: eine solche Gruppe G ist dann das semidirekte Produkt des abelschen Normalteilers Γ mit der zyklischen Gruppe $T = \{1,t\}$, wobei die Involution t auf Γ invertierend wirkt, d.h.

(3) $\quad t\sigma = \sigma^{-1}t$ *für jedes* $\sigma\in\Gamma$.

Ist Γ zyklisch, so ist G eine Diedergruppe im üblichen Sinne. Im übrigen ist G wegen (3) genau dann abelsch, wenn Γ elementarabelsch vom Exponenten 2 ist, d.h. nur aus Involutionen besteht. Eine leichte Rechnung zeigt

(4) $\quad [G,G] = \Gamma^2$, *also* $G^{ab} \cong T\times\Gamma/\Gamma^2$

und ferner, wenn $\mathrm{ver}_{G/\Gamma} : G^{ab} \longrightarrow \Gamma^{ab} = \Gamma$ die kohomologische Verlagerung bezeichnet

(5) $\quad \mathrm{ver}_{G/\Gamma} = 0$.

Nun sei L/k eine endlich Galoissche Körpererweiterung. Abweichend von der eingebürgerten Terminologie wollen wir L/k eine *Diedererweiterung* nennen, wenn $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ vom Diedertyp ist; ist dabei G sogar Diedergruppe (im üblichen Sinne, d.h. Γ zyklisch), so bezeichnen wir L/k als *reine Diedererweiterung* (zu diesen vgl. § 5.).

§ 2. Moduln über Gruppen vom Diedertyp

G sei vom Diedertyp und M sei ein (im allgemeinen additiv geschriebener) G-(Links-)Modul. Dann kann man wegen (3) M genauso gut als Γ-(Links-)Modul

(6) $\quad$ *mit Involution* $\overline{m} := {}^t m$, *so daß* $\overline{{}^\sigma m} = {}^{\sigma^{-1}}\overline{m}$ *für alle* $m\in M$,

auffassen. Wie schon in der Einleitung geschehen, kann man für jedes $\sigma\in\Gamma$ die zweielementige Untergruppe $T_\sigma = \{1,\sigma t\}$ betrachten, wobei wegen $\sigma^2 t = \sigma t\sigma^{-1}$ die Beziehung

(7) $\quad T_{\sigma^2} = \sigma T\sigma^{-1}$

gilt, genauer: T und T_ϱ sind genau dann in G konjugiert, falls $\varrho = \sigma^2$ für geeignetes $\sigma\in\Gamma$ gilt. Nun bezeichne im folgenden

$$M_\sigma := M^{T_\sigma} \text{ den Fixmodul unter } T_\sigma\ (\sigma\in\Gamma).$$

Dann ist mit (6) klar:

(8) $\quad \overline{m} = {}^{\sigma^{-1}}m$ *ist äquivalent mit* $m\in M_\sigma$ *bzw.* $\overline{m}\in M_{\sigma^{-1}}$.

Nun sei wie üblich

$$N_\Gamma : M \longrightarrow M^\Gamma \text{ mit } m \longmapsto \sum_{\sigma\in\Gamma} {}^\sigma m$$

der Normhomomorphismus; zufolge (6) gilt dabei

(9) $\overline{N_\Gamma(m)} = N_\Gamma(\bar{m})$

und wegen (8) und (9) hat man dann aufgrund $M^G = M^\Gamma \cap M^T$

(10) $N_\Gamma^{-1}(M^G) = \{m \in M | N_\Gamma(m) = \overline{N_\Gamma(m)}\}$ *und* $N_\Gamma(M_\sigma) \subseteq M^G$ $(\sigma \in \Gamma)$,

d.h. es ist sinnvoll, die Faktorgruppe

(11) $J(G,M) := N_\Gamma^{-1}(M^G) \Big/ \sum_{\sigma \in \Gamma} M_\sigma$

zu betrachten. Ist also L/k eine Diedererweiterung, so gilt

$$J(L/k) = J(G, L^\times),$$

wobei die linke Seite im Sinne von (2) und die rechte gemäß (11) zu verstehen ist.

Nun einige elementare Rechenregeln im Zusammenhang mit J; zunächst ist klar:

(12) $J(G, \bullet)$ *ist ein kovarianter Funktor von der Kategorie der* G-*(Links-)moduln in die Kategorie der abelschen Gruppen.*

Außerdem entnimmt man (8)

(13) $m + {}^\sigma\bar{m}, \bar{m} + {}^\sigma m \in M_\sigma$ *für alle* $m \in M$ $(\sigma \in \Gamma)$,

folglich wegen ${}^{(\sigma-1)}m = (\bar{m} + {}^\sigma m) - (\bar{m} + m)$:

(14) ${}^{(\sigma-1)}M \subseteq M_\sigma + M_1$ $(\sigma \in \Gamma)$.

Andererseits sieht man wegen (7) leicht

(15) $m \in M_{\varrho\sigma^2}$ *genau dann, wenn* ${}^{\sigma^{-1}}m \in M_\varrho$ $(\varrho, \sigma \in \Gamma)$.

Wegen $m = {}^{\sigma^{-1}}m + {}^{(\sigma-1)\sigma^{-1}}m$ entnimmt man (14) und (15) sofort

(16) $M_{\varrho\sigma^2} \subseteq M_\varrho + M_\sigma + M_1$

und daraus durch Iteration:

(17) *Ist* $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ *zyklisch (also* G *Diedergruppe), so gilt*
$\sum_{\sigma \in \Gamma} M_\sigma = M_1 + M_\gamma = M_1 + M_{\gamma^{-1}}$.

Zu guter Letzt heben wir noch hervor (und dies ist offensichtlich):

(18) *Läßt man (für irgendein* $\sigma \in \Gamma$*)* T_σ *die Rolle von* T *spielen, so ändert sich nichts an der Definition von* $J(G,M)$.

§ 3. Restriktion und Korestriktion

Es sei G vom Diedertyp und $H \leqq G$ eine Untergruppe. Dabei betrachten wir zunächst den

Fall a): $H \nsubseteq \Gamma$.

Zufolge (18) kann dabei ohne Einschränkung $H = \Delta T$ mit $\Delta := H \cap \Gamma$ angenommen werden. Ist jetzt M ein G-Modul, so ist klar:

(19 a) *Die Identität auf* M *induziert einen Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{cor}_{G/H}$: $J(H,M) \longrightarrow J(G,M)$, *genannt Korestriktion.*

Nun sei $\Gamma = \dot{\bigcup\limits_{\lambda}} \Delta\lambda$ eine Nebenklassenzerlegung von Γ modulo Δ (λ durchlaufe dabei ein fest gewähltes Vertretersystem), dann ist $G = \dot{\bigcup\limits_{\lambda}} \lambda H$ eine solche von G modulo H, und wir behaupten:

(20 a) *Die Zuordnung* $m \longmapsto \sum\limits_{\lambda} {}^{\lambda}m$ *induziert einen von der Wahl des Vertretersystems* $\{\lambda\}$ *unabhängigen Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{res}_{G/H}$: $J(G,M) \longrightarrow J(H,M)$, *genannt Restriktion.*

In der Tat folgt zunächst aus $N_{\Gamma}(m) = \overline{N_{\Gamma}(m)}$ sofort $N_{\Delta}(\sum\limits_{\lambda} {}^{\lambda}m) = N_{\Gamma}(m) = \overline{N_{\Gamma}(m)} = \overline{N_{\Delta}(\sum\limits_{\lambda} {}^{\lambda}m)}$. Nun sei $m \in M_{\sigma}$ und λ fest: dann gilt entweder $\lambda^{-1}\sigma^{-1} = \delta^{-1}\lambda$ mit geeignetem $\delta \in \Delta$, also (vgl. (6), (8)) $\overline{{}^{\lambda}m} = {}^{\lambda^{-1}}\overline{m} = {}^{\lambda^{-1}\sigma^{-1}}m = {}^{\delta^{-1}\lambda}m$, d. h. ${}^{\lambda}m \in M_{\delta}$, oder es gibt in unserem Vertretersystem ein von λ verschiedenes μ, so daß man für geeignetes $\delta \in \Delta$ $\lambda^{-1}\sigma^{-1} = \delta^{-1}\mu$ und damit $\mu^{-1}\sigma^{-1} = \delta^{-1}\lambda$ hat; dann gilt (vgl. wiederum (6), (8)) $\overline{{}^{\lambda}m + {}^{\mu}m} = {}^{\lambda^{-1}}\overline{m} + {}^{\mu^{-1}}\overline{m} = {}^{\lambda^{-1}\sigma^{-1}}m + {}^{\mu^{-1}\sigma^{-1}}m = {}^{\delta^{-1}}({}^{\mu}m + {}^{\lambda}m)$, d. h. ${}^{\lambda}m + {}^{\mu}m \in M_{\delta}$. Damit ist stets $\sum\limits_{\lambda} {}^{\lambda}m \in \sum\limits_{\delta \in \Delta} M_{\delta}$. Es bleibt also nur noch die Unabhängigkeit von $\{\lambda\}$ zu zeigen; diese ist jedoch mit (14) klar.

Wegen $|G:H| \cdot m = |\Gamma:\Delta| \cdot m = \sum\limits_{\lambda} {}^{\lambda}m - \sum\limits_{\lambda} {}^{(\lambda-1)}m$ und (14) folgt jetzt (wie in der Kohomologietheorie)

(21 a) $\mathrm{cor}_{G/H} \circ \mathrm{res}_{G/H} = |G:H| \cdot \mathrm{Id}.$

Wählt man in (21 a) speziell $H = T$, so folgt wegen $J(T,M) = 0$:

(22) $J(G,M)$ *ist Torsionsgruppe mit* $\exp(J(G,M)) \,\Big|\, |\Gamma|$.

Wir kommen zum

Fall b): $H \subseteq \Gamma$.

Bezeichnet allgemein $H^q(G,M)$ die q-te Tatesche Kohomologiegruppe des G-(Links-)Moduls M ($q \in \mathbb{Z}$), so folgt aus (14) sofort[1]):

(19 b) *Die Identität auf* M *induziert einen Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{cor}_{G/H}$: $H^{-1}(H,M) \longrightarrow J(G,M)$, *genannt Korestriktion.*

Nun sei $\Gamma = \dot{\bigcup\limits_{\lambda}} H\lambda$ eine Nebenklassenzerlegung von Γ modulo H, dann ist $G = \dot{\bigcup\limits_{\lambda}} (H\lambda \cup h\lambda t)$ eine solche Gruppe von G modulo H, und wir behaupten:

(20 b) *Die Zuordnung* $m \longmapsto \sum\limits_{\lambda} ({}^{\lambda}m - {}^{\lambda}\overline{m})$ *induziert einen von der Wahl des Vertretersystems* $\{\lambda\}$ *unabhängigen Gruppenhomomorphismus* $\mathrm{res}_{G/H}$: $J(G,M) \longrightarrow H^{-1}(H,M)$, *genannt Restriktion.*

---

1) Hier und im folgenden machen wir zwangslos von der Tateschen Kohomologietheorie endlicher Gruppen Gebrauch (vgl. etwa [2], Ch. IV in [3], I. in [10] oder [11]), ebenso von den Grundzügen der Galoiskohomologie (vgl. dazu auch II./§ 2. in [10]).

Zum Beweis betrachten wir zunächst den Spezialfall $H = \Gamma$: dann ist die fragliche Abbildung durch $m \longmapsto m - \overline{m}$ gegeben, und alle Behauptungen lassen sich umgehend verifizieren. Im allgemeinen Fall sieht man sofort, daß $\mathrm{res}_{G/H} = \mathrm{res}^{-1}_{\Gamma/H} \circ \mathrm{res}_{G/\Gamma}$ gilt, wobei $\mathrm{res}^{-1}_{\Gamma/H}$ die übliche Restriktion bei (-1)-ten Kohomologiegruppen ist. Damit ist alles gezeigt.

Übrigens hat man auch hier wegen $|G:H| \cdot m = 2 \cdot |\Gamma:H| \cdot m = \sum_{\lambda}({}^{\lambda}m - {}^{\lambda}\overline{m}) - \sum_{\lambda}{}^{(\lambda-1)}(m - \overline{m}) + |\Gamma:H| \cdot (m + \overline{m})$ mit (13) und (14)

(21b) $\quad \mathrm{cor}_{G/H} \circ \mathrm{res}_{G/H} = |G:H| \cdot \mathrm{Id}.$

Wählt man in (20b) speziell $H = \Gamma$ und definiert

(23) $\quad J_0(G,M) := \mathrm{Ker}\ \mathrm{res}_{G/\Gamma},$

so resultiert aus (21b)

(24) $\quad \exp(J_0(G,M)) \,\Big|\, 2,$

folglich zusammen mit (22):

(25) *Ist* $|\Gamma|$ *ungerade, so ist* $\mathrm{res}_{G/\Gamma} : J(G,M) \longrightarrow H^{-1}(\Gamma, M)$ *injektiv, mehr noch:* $J(G,M)$ *kann dann als direkter Summand in* $H^{-1}(\Gamma, M)$ *aufgefaßt werden.*

§ 4. Drei exakte Sequenzen

Lemma 1. – *Man hat die exakte 5-Terme-Sequenz*

$$0 \longrightarrow J_0(G,M) \hookrightarrow J(G,M) \xrightarrow{\alpha} H^{-1}(\Gamma,M) \xrightarrow{\beta} H^{-1}(G,M) \xrightarrow{\gamma} H^{-1}(T,N_\Gamma(M)) \longrightarrow 0$$

mit $\alpha = \mathrm{res}_{G/\Gamma}$ *gemäß* (20b) *(also durch* $m \longmapsto m - \overline{m}$ *induziert),* $\beta = \mathrm{cor}^{-1}_{G/\Gamma}$ *und* $\gamma = \mathrm{def}^{-1}_{G/\Gamma}$ *die Deflation im Sinne von Kuzmin (also die durch* $m \longmapsto N_\Gamma(m)$ *induzierte Abbildung aus Lemma 7. in* [4]).

Zusatz zu Lemma 1. – *Ist zusätzlich* $|\Gamma|$ *ungerade und* $H^1(T,M^\Gamma) = 0$, *so gilt* $J_0(G,M) = 0 = H^{-1}(T,N_\Gamma(M))$, *und die verbleibende kurze exakte Sequenz zerfällt, d. h.* $H^{-1}(\Gamma,M) \cong J(G,M) \oplus H^{-1}(G,M)$.

Zum Beweis beachten wir, daß zufolge Lemma 7, in [4] zusammen mit (23) nur noch „$\mathrm{Im}\ \alpha \supseteq \mathrm{Ker}\ \beta$" zu zeigen bleibt, denn „$\beta \circ \alpha = 0$" ist klar. Dazu sei $m \in \mathrm{Ker}\ N_\Gamma \cap I_G M$ (wobei wie üblich I_G das Augmentationsideal im Gruppenring $\mathbb{Z}G$ bezeichne), d. h. es gibt ein $x \in M$ mit $m \in (x - \overline{x}) + I_\Gamma M$. Aus letzterem folgt mit (9): $0 = N_\Gamma(m) = N_\Gamma(x) - \overline{N_\Gamma(x)}$. Also repräsentiert x ein Urbild von m unter α. Was nun den Zusatz betrifft, so genügt es wegen (25) $H^1(T,N_\Gamma(M)) \cong H^{-1}(T,N_\Gamma(M)) = 0$ zu beweisen. Da voraussetzungsgemäß $|\Gamma|$ ungerade ist, ist dann $H^0(\Gamma,M)$ als T-Modul kohomologisch trivial, d. h. aus der exakten T-Modulsequenz

$$0 \longrightarrow N_\Gamma(M) \hookrightarrow M^\Gamma \longrightarrow H^0(\Gamma,M) \longrightarrow 0$$

ergibt sich nach Übergang zur exakten Kohomologiesequenz

$$H^q(T,N_\Gamma(M)) \cong H^q(T,M^\Gamma) \text{ für alle } q \in \mathbb{Z},$$

d. h. wir sind fertig.

Die exakte Sequenz in Lemma 1. befriedigt noch nicht (ausgenommen im Falle „$|\Gamma|$ ungerade"), denn sie macht ja nur eine Aussage über J/J_0. Wenigstens in Spezialfällen kann man sofort mehr aussagen:

Lemma 2. – *Ist* $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ *zyklisch (also* G *Diedergruppe), so hat man eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow J(G,M) \xrightarrow{\varphi} H^1(G,M) \xrightarrow{\psi} H^1(T,M) \oplus H^1(T_\gamma,M)$$

mit $\psi = (\mathrm{res}^1_{G/T}, \mathrm{res}^1_{G/T_\gamma})$ *und* φ *induziert durch* $m \longmapsto x_m$, *wobei*

$$x_m(\gamma^i) := \sum_{\nu=0}^{i-1} {}^{\gamma^\nu(t-1)}m \ \textit{und}\ x_m(\gamma^i t) := \sum_{\nu=0}^{i} {}^{\gamma^\nu(t-1)}m \quad (0 < i \leqq |\Gamma|).$$

Zum Beweis zeigt zunächst eine (längliche) direkte Rechnung, daß durch obige Festsetzung ein normierter 1-Kozykel x_m wohldefiniert ist (d.h. $x_m(1) = 0$ und $x_m(rs) = x_m(r) + {}^r x_m(s)$ für alle $r,s \in G$). Wir berechnen nun den Kern der durch $m \longmapsto x_m$ gegebenen Abbildung $N^{-1}(M^G) \longrightarrow H^1(G,M)$; sei dazu $x_m(s) = {}^{(s-1)}y$ für alle $s \in G$, so folgt

$${}^{(\gamma-1)}y = x_m(\gamma) = {}^{(t-1)}m = x_m(t) = {}^{(t-1)}y,$$

also (vgl. (8))

$$m = y + z \text{ mit } y \in M_{\gamma^{-1}} \text{ und } z \in M_1, \text{ d.h. wegen (17)}$$

$$m \in \sum_{\sigma\in\Gamma} M_\sigma.$$

Der Schluß ist umkehrbar, also ist φ injektiv. Außerdem ist wegen $x_m(t) = {}^{(t-1)}m$ sowie $x_m(\gamma t) = {}^{(1+\gamma)(t-1)}m = {}^{(\gamma t-1)(1-t)}m$ ersichtlich $\psi \circ \varphi = 0$, so daß nur noch „$\mathrm{Ker}\,\psi \subseteq \mathrm{Im}\,\varphi$" zu zeigen bleibt. Dazu sei $x \in Z^1(G,M)$ ein normierter 1-Kozykel, insbesondere also $N_\Gamma(x(\gamma)) = 0$ und $x(t) + \overline{x(t)} = 0$ (vgl. etwa den Beweis von Satz (6.1) auf p. 82 oben in [10]). Repräsentiert jetzt x zunächst nur ein Element in $\mathrm{Ker}\,\mathrm{res}^1_{G/T_\gamma}$, so folgt für geeignetes $y \in M$

$$\begin{aligned} {}^{(\gamma-1)}\bar{y} - {}^{(t-1)}\bar{y} = {}^{(\gamma t-1)}y = x(\gamma t) = x(\gamma) + {}^\gamma x(t) = x(\gamma) - {}^\gamma\overline{x(t)} = \\ = x(\gamma) - x(t) - {}^{(\gamma-1)}\overline{x(t)} + {}^{(t-1)}\overline{x(t)}, \end{aligned}$$

d.h. der durch $x_0(s) := x(s) - {}^{(s-1)}\overline{(y + x(t))}$ definierte und in $H^1(G,M)$ dieselbe Klasse wie x repräsentierende 1-Kozykel x_0 erfüllt die Gleichung $x_0(\gamma) = x_0(t)$. Repräsentiert jetzt x und damit x_0 auch noch ein Element in $\mathrm{Ker}\,\mathrm{res}^1_{G/T}$, so folgt $x_0(t) = {}^{(t-1)}m = x_m(t)$ mit $m \in N^{-1}(M^G)$ wegen (9) und (10) zufolge $N_\Gamma({}^{(t-1)}m) = N_\Gamma(x_0(\gamma)) = N_\Gamma(x(\gamma)) = 0$. Wie in [10], loc. cit. folgt daraus durch Iteration wie gewünscht $x_0 = x_m$.

Des Zusammenspiels mit Lemma 1. wegen ist es vorteilhaft, Lemma 2. wie folgt zu ergänzen:

Lemma 3. – *Ist* $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ *zyklisch (also* G *Diedergruppe), so hat man eine exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow J_0(G,M) \xrightarrow{\varphi} H^1(G,M) \xrightarrow{\chi} H^1(T,M) \oplus H^1(T_\gamma,M) \oplus H^1(\Gamma,M)^T$$

mit $\chi = (\mathrm{res}^1_{G/T}, \mathrm{res}^1_{G/T_\gamma}, \mathrm{res}^1_{G/\Gamma})$ *und* φ *wie in Lemma 2.* .

In Kenntnis von Lemma 2. samt Beweis ist hier nur noch „Im φ = Ker χ" zu beweisen; dabei ist „$\subseteq$" klar wegen ${}^{(t-1)}m = x_m(\gamma) = {}^{(\gamma-1)}y$ zufolge $I_\Gamma M = {}^{(\gamma-1)}M$ (da Γ zyklisch). Da diese Schlußweise umkehrbar ist sind wir fertig.

§ 5. Moduln über Diedergruppen

G sei hier zunächst Diedergruppe, als $\Gamma = \langle\gamma\rangle$ zyklisch. Dann ergibt sich aus Lemma 2. sofort:

Satz 1. – *Ist* G *Diedergruppe und ist* $H^1(G,M) = 0$, *so folgt* $J(G,M) = 0$.

Korollar 1. – $J(L/k) = 1$, *falls* L/k *reine Diedererweiterung.*

Ist dabei $|\Gamma| = 2$, also G die Kleinsche Vierergruppe, so geht Satz 1. in das Corollaire auf p. 68 in [5] über. Darüber hinaus erscheint erwähnenswert, daß auch Proposition 2. ibid. nur ein Spezialfall unseres Lemma 2. ist; dazu muß man allerdings letzteres umformulieren: denkt man sich nämlich die Adamsonschen Kohomologiegruppen (siehe [1])

$$H^1([G:T],M),\ H^1([G:T_\gamma],M) \text{ und } H^1([G:\Gamma],M) \cong H^1(T,M^\Gamma)$$

jeweils via Inflation in $H^1(G,M)$ eingebettet (vgl. Theorem 7.3 ibid.), so kann man Lemma 2./3. auch so lesen:

$$J(G,M) \cong H^1([G:T],M) \cap H^1([G:T_\gamma],M) \text{ resp.}$$
$$J_0(G,M) \cong H^1([G:T],M) \cap H^1([G:T_\gamma],M) \cap H^1(T,M^\Gamma).$$

Ferner möge auf folgenden Zusammenhang mit [9] (vgl. auch die Vorankündigung [8] dazu) hingewiesen werden: die Gruppe $PU(\tau,B)$ in der Terminologie von [8] ist nämlich nichts anderes als

$$J(G,\mathrm{Nrd}_{\bar{B}/C(\bar{B})}(\bar{B}^\times)) \text{ mit } G := \langle\sigma,\tilde{\tau}_2\rangle$$

bei Verschmelzung beider Terminologien (d. h. der aus [8] und unserer). Insofern sind Cor. 1./2./3. in [8] (resp. die entsprechenden Korollare in § 4. von [9]) jeweils direkte Folgerungen unseres Satz 1., wobei man bei Corollary 1. (resp. Corollary 4.17) noch die Erkenntnis der vorletzten Zeile auf p. 120 in [4] für $q = 1$ hinzunehmen muß. Unser Korollar 1. tritt demnach versteckt schon im Beweis von Corollary 4.13 auf p. 205/6 der englischen Übersetzung von [9] auf. Übrigens sieht man so (auch im Hinblick auf den Zusammenhang mit [5]) einige schon in der Einleitung erwähnte Berührpunkte mit der Theorie der Schiefkörper.

Nun wollen wir aus Satz 1. eine leichte Folgerung herleiten, die sich nicht nur auf Diedergruppen bezieht:

Satz 2. – *Ist* G *vom Diedertyp und ist* $H^1(H,M) = 0$ *für jede Diedergruppe* $H \leqq G$, *so gilt sogar (in Verschärfung von* (22))

$$\exp(J(G,M)) \cdot \exp(\Gamma) \,\big|\, |\Gamma|.$$

Korollar 2. – *Ist* L/k *Diedererweiterung, so gilt sogar*

$$\exp(J(L/k))\cdot\exp(\mathrm{Gal}(L/K))\,\Big|\,|L:K|.$$

Offenbar ist Korollar 1. ein Spezialfall von Korollar 2.! Zum Beweis wähle man in Γ eine zyklische Untergruppe Δ mit $|\Delta| = \exp(\Gamma)$ und betrachte die Diedergruppe $H := \Delta T$. Dann ist mit Satz 1. $J(H,M) = 0$, und wegen $|G:H| = |\Gamma|/\exp(\Gamma)$ folgt dann die Behauptung aus (21a).

§ 6. Ein Deflationssatz

Die Ergebnisse in § 4. haben den Mangel, daß man bei nicht-zyklischem Γ nur Aussagen über $J(G,M)/J_0(G,M)$ machen kann. Dem begegnet man durch Entwickeln einer Technik, die die Möglichkeit des Ausnutzens von Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden von Γ eröffnet.

Sei nun $\Delta \leqq \Gamma$, also sogar $\Delta \trianglelefteq G$. Dann kann man für jedes $\sigma \in \Gamma$ die Gruppe $H_\sigma := {}$ $:= \Delta T_\sigma \leqq G$ vom Diedertyp betrachten. Also ist $J(H_\sigma, M)$ erklärt, wobei offenbar $J(H_\sigma,M) = J(H_{\sigma\delta},M)$ für alle $\delta \in \Delta$ (vgl. (18)). Andererseits verifiziert man leicht mittels (15):

(26) $m \longmapsto {}^{\sigma^{-1}}m$ *induziert einen Isomorphismus* $J(H_{\sigma^2\varrho},M) \xrightarrow{\simeq} J(H_\sigma,M)$.

Nun setzen wir $\bar{G} := G/\Delta$ und $\bar{\Gamma} := \Gamma/\Delta$; $\bar{G}$ ist dann vom Diedertyp, wobei $\bar{G} = \bar{\Gamma}T$ (T bettet sich kanonisch in $\bar{G}$ ein). Wegen der Normschachtelungsformel $N_{\bar{\Gamma}} \circ N_\Delta = N_\Gamma$ und wegen $N_\Delta(M_{\sigma\delta}) \subseteq N_\Delta(M)_\sigma \supseteq N_\Delta(M_\sigma)$ $(\sigma \in \Gamma, \delta \in \Delta)$ hat man:

(27) *Die Zuordnung* $m \longmapsto N_\Delta(m)$ *induziert einen surjektiven Homomorphismus* $\mathrm{def}_{G/\Delta} : J(G,M) \longrightarrow J(\bar{G}, N_\Delta(M))$, *genannt Deflation.*

Der nachfolgende Deflationssatz eröffnet nun die eingangs dieses Paragraphen erwähnten Möglichkeiten.

Lemma 4. – *In der Situation von* (26) *und* (27) *hat man die exakte Sequenz*

$$\bigoplus_\lambda J(H_\lambda,M) \xrightarrow{\omega} J(G,M) \xrightarrow{\vartheta} J(\bar{G},N_\Delta(M)) \longrightarrow 0$$

mit $\vartheta = \mathrm{def}_{G/\Delta}$, *wobei* $\{\lambda\}$ *ein fest gewähltes Vertretersystem von* Γ *modulo* Δ *durchläuft und* $\omega = \sum_\lambda \mathrm{cor}_{G/H_\lambda}$ *(im Sinne von* (19a)) *ist.*

Da $\mathrm{def}_{G/\Delta} \circ \omega = 0$ klar ist, genügt es zufolge (27) „$\mathrm{Ker}\, \mathrm{def}_{G/\Delta} \subseteq \mathrm{Im}\, \omega$“ zu zeigen. Dazu sei $N_\Delta(m) = \overline{N_\Delta(m)}$ und gleichzeitig $N_\Delta(m) = \sum_\lambda N_\Delta(m_\lambda) = N_\Delta(\sum_\lambda m_\lambda)$, wobei jeweils $N_\Delta(m_\lambda) = {}^\lambda\overline{N_\Delta(m_\lambda)}$; folglich repräsentiert jedes m_λ ein Element in $J(H_\lambda,M)$ und $m_0 := m - \sum_\lambda m_\lambda \in \mathrm{Ker}\, N_\Delta \subseteq N_\Delta^{-1}(M^H)$ ein solches in $J(H_1,M)$, q.e.d. .

Als Vorbereitung einer ersten Anwendung von Lemma 4. zeigen wir nun

Lemma 5. – G *sei vom Diedertyp und* $\Delta \leqq \Gamma$ *derart, daß* $\bar{\Gamma} := \Gamma/\Delta$ *zyklisch (also* $\bar{G} := G/\Delta$ *Diedergruppe) ist. Ist dann* $H^1(G,M) = 0$ *und für* $H := \Delta T$ $\mathrm{res}^0_{H/\Delta} : H^0(H,M) \longrightarrow H^0(\Delta,M)$ *die Nullabbildung, dann folgt* $J(\bar{G},N_\Delta(M)) = 0$.

Man hat nämlich das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} M^H \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, dashed, "\ominus"] & H^0(H,M) \arrow[d, "\mathrm{res}^0_{H/\Delta}"] \\ M^\Delta \arrow[r] & H^0(\Delta,M) , \end{tikzcd}$$

wobei dann voraussetzungsgemäß $\ominus$ die Nullabbildung ist. Andererseits erhält man aus der üblichen Inflation-Restriktion-Sequenz $H^1(\overline{G},M^\Delta) = 0$, so daß sich aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N_\Delta(M) \hookrightarrow M^\Delta \longrightarrow H^0(\Delta,M) \longrightarrow 0$$

nach Übergang zu $\overline{G}$-resp. T-invarianten Elementen das folgende kommutative Kohomologiediagramm mit exakten Zeilen ergibt:

$$\begin{tikzcd} M^G \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^0(\Delta,M)^{\overline{G}} \arrow[r] \arrow[d, hook] & H^1(\overline{G},N_\Delta(M)) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}^1_{\overline{G}/T}"] & 0 \\ M^H \arrow[r, "\ominus"] & H^0(\Delta,M)^T \arrow[r] & H^1(T,N_\Delta(M)) . \end{tikzcd}$$

Wegen $\ominus = 0$ (siehe oben) ist dann $\mathrm{res}^1_{\overline{G}/T}$ injektiv, demnach $J(\overline{G},N_\Delta(M)) = 0$ wegen Lemma 2..

Als erste Anwendung von Lemma 4./5. zeigen wir:

Satz 3. – *Ist* G *vom Diedertyp und* M *kohomologisch trivialer* G-*Modul, so folgt* $J(G,M) = 0$.

Wir schließen nach der Anzahl der Erzeugenden von Γ; der Induktionsanfang ist dann mit Satz 1. erledigt. Im allgemeinen Fall wählen wir $\Delta \leqq \Gamma$ so, daß $\overline{\Gamma} := \Gamma/\Delta$ zyklisch ist und Δ weniger Erzeugende als Γ hat. Dann folgt nach Induktionsvoraussetzung aus Lemma 4. $J(\overline{G},N_\Delta(M)) \cong J(G,M)$ und aus Lemma 5. sodann wie behauptet $J(\overline{G},N_\Delta(M)) = 0$.

§ 7. Diedererweiterungen und Klassenformationen

Satz 4. – *Ist* L/k *Diedererweiterung und* k *lokaler Körper, dann gilt* $J(L/k) = 1$.

Zum Beweis können wir den von Satz 3. abschreiben; der einzige Unterschied ist der, daß die Voraussetzungen zur Benutzung von Lemma 5. hier nicht trivialerweise erfüllt sind, sondern vielmehr aus der Kommutativität des aus der (lokalen) Klassenkörpertheorie bekannten Diagramms

$$\begin{tikzcd} H^0(H,L^\times) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{res}^0_{H/\Delta}"] & H^{ab} \arrow[d, "\mathrm{ver}_{H/\Delta}"] \\ H^0(\Delta,L^\times) \arrow[r, "\cong"] & \Delta \end{tikzcd}$$

erst verifiziert werden müssen (siehe z. B. [10], II./§ 5.). Dies ist aber klar wegen (5).

Natürlich haben wir beim obigen Beweis nur benutzt, daß die lokalen Körper eine Klassenformation konstituieren: Satz 4. ist also in Wahrheit ein Ergebnis über Klassenformationen (zu diesem Begriff vgl. etwa [10], II./§ 1. oder [2], 65.), und deshalb beweist man formal genauso (siehe [10], III.) das nachfolgende globale Pendant dazu:

Satz 5. – *Ist* L/k *Diedererweiterung,* k *globaler Körper und* C_L *die Idèleklassengruppe von* L, *dann gilt* $J(G,C_L) = 1$.

§ 8. Eine Art „Lemma von Shapiro"

Im Hinblick auf die Erfordernisse des nächsten Paragraphen benötigen wir ein weiteres Hilfsmittel, nämlich einen Satz, der dem „Lemma von Shapiro" aus der Tateschen Kohomologietheorie nachempfunden ist.

Hierzu sei G vom Diedertyp und $H \leqq G$ Untergruppe. Wie schon in § 3. betrachten wir zunächst den

Fall a): $H \nsubseteq \Gamma$.

Abermals kann wegen (18) ohne Einschränkung $H = \Delta T$ mit $\Delta := H \cap \Gamma$ angenommen werden, und wir wählen auch wieder eine Zerlegung $\Gamma = \bigcup_\lambda \lambda\Delta$, also $G = \bigcup_\lambda \lambda H$, diesmal mit $\lambda = 1$ bei $\lambda \in \Delta$.

P sei jetzt H-Modul; dann ist $M := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P = \bigoplus^{\gamma} \lambda \otimes P$ G-Modul. $\iota : P \longrightarrow M$ mit $p \longmapsto 1 \otimes p$ und $\pi : M \longrightarrow P$ mit $\sum_\lambda \lambda \otimes p_\lambda \longmapsto p_1$ sind dann H-Homomorphismen und induzieren entsprechende Homomorphismen ι_0 und π_0 zwischen den zugehörigen J (im Sinne von (12)). So und mittels (19a) resp. (20a) definiert das nachfolgende Diagramm

$$(28\,a)\qquad \begin{tikzcd}
J(G,M) \arrow[r, "\mathrm{res}_{G/H}"] \arrow[dr, dashed, shift left, "\Phi"] & J(H,M) \arrow[d, "\pi_0"] \\
J(H,M) \arrow[u, "\mathrm{cor}_{G/H}"] & J(H,P) \arrow[l, "\iota_0"] \arrow[ul, dashed, shift left, "\Psi"]
\end{tikzcd}$$

zwei Homomorphismen Φ und Ψ, wobei man aus $\pi(\sum_\lambda \lambda \otimes p) = p$ zunächst $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}$ schließt. Andererseits gilt für jeden Vertreter $\mu \in \{\lambda\}$ $\pi(\sum_\lambda{}'(\mu \otimes p_\mu)) = \lambda'\mu \otimes p_\mu = \mu \otimes p_\mu + {}^{(\lambda'-1)}(\mu \otimes p_\mu)$, wobei λ' derart, daß $\lambda'\mu \in \Delta$ gilt. (14) ergibt dann $\Psi \circ \Phi = \mathrm{Id}$, d. h. Φ und Ψ sind zueinander inverse Isomorphismen. Nun zum

Fall b): $H \subseteq \Gamma$,

wo wir von der Zerlegung $\Gamma = \bigcup_\lambda \lambda H$ ausgehen, welche dann die Zerlegung $G = \bigcup_\lambda (\lambda H \cup t\lambda H)$ nach sich zieht. Auch hier sei $\lambda = 1$ bei $\lambda \in \Delta$.

Jetzt sei P wieder H-Modul; auch hier interessieren wir uns für den G-Modul $M := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P = \bigoplus_\lambda (\lambda \otimes P \oplus t\lambda \otimes P)$; ι und π sind dann wie in Fall a) definiert. Bezeichnen dabei ι' resp. π' die jeweils auf den H^{-1} dadurch induzierten Homomorphismen, so definiert das gemäß (19b) resp. (20b) zu verstehende nachfolgende Diagramm

$$
(28\mathrm{b})\qquad
\begin{tikzcd}
J(G,M) \arrow[r, "\mathrm{res}_{G/H}"'] \arrow[dr, dashed, bend left=10, "\Phi"] & H^{-1}(H,M) \arrow[d, "\pi'"] \\
H^{-1}(H,M) \arrow[u, "\mathrm{cor}_{G/H}"] & H^{-1}(H,P) \arrow[l, "\iota'"] \arrow[ul, dashed, bend left=10, "\Psi"]
\end{tikzcd}
$$

zwei Homomorphismen Φ und Ψ. Wegen $\pi(\sum_\lambda(\lambda\otimes p + t\lambda\otimes p)) = p$ folgt dann einerseits $\Phi\circ\Psi = \mathrm{Id}$, andererseits hat man für jedes $\mu\in\{\lambda\}$ sowohl

$$\pi(\textstyle\sum_\lambda({}^{\lambda}(\mu\otimes p_\mu) - {}^{\lambda t}(\mu\otimes p_\mu))) = \lambda'\mu\otimes p_\mu = \mu\otimes p_\mu + {}^{(\lambda'-1)}(\mu\otimes p_\mu) \text{ mit } \lambda'\mu\in\Delta,$$
$$\text{als auch } \pi(\textstyle\sum_\lambda({}^{\lambda}(t\mu\otimes p_\mu) - {}^{\lambda t}(t\mu\otimes p_\mu))) = -\lambda'\mu\otimes p_\mu = t\mu\otimes p_\mu - (t\mu\otimes p_\mu + {}^{\lambda' t}(t\mu\otimes p_\mu)).$$

(13) und (14) ergeben daraus $\Psi\circ\Phi = \mathrm{Id}$, d.h. auch hier sind Φ und Ψ zueinander inverse Isomorphismen.

Nun behaupten wir noch $J_0(G,M) = 0$ im Falle b); zum Beweis schreiben wir künstlich $M = \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}\Gamma} (\mathbb{Z}\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}H} P)$ und wenden Φ aus (28b) zuerst im Spezialfall $H = \Gamma$ an, um dann den Isomorphismus des üblichen „Lemma von Shapiro“ für (-1)-te Tatesche Kohomologiegruppen nachzuschalten. Zufolge (23) wird dabei $J_0(G,M)$ schon im ersten Schritt auf Null abgebildet! Also haben wir insgesamt bewiesen:

Lemma 6. – P *sei* H-*Modul,* $H \leqq G$ *mit* G *vom Diedertyp. Ist dann* $M := \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}H} P$ *(also* G/H-*induzierter Modul), so hat man mit* (28) *einen Isomorphismus*

$$J(G,M) \xrightarrow{\simeq} \begin{cases} J(H,P) & \textit{falls } a)\colon\ H \nsubseteq \Gamma, \\ H^{-1}(H,P) & \phantom{\textit{falls }} b)\colon\ H \subseteq \Gamma. \end{cases}$$

Dabei gilt im Falle b) *sogar* $J_0(G,M) = 0$.

§ 9. Diedererweiterungen und Idèlegruppen

In diesem Abschnitt sei k durchweg ein globaler Körper; L/k sei eine Diedererweiterung und I_L die Idèlegruppe von L. Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis von

Satz 6. – *Man hat* $J_0(G,I_L) = 1$ *und*

$$J(G,I_L) \xrightarrow{\simeq} \prod_{\substack{G_{\mathfrak{p}} \subseteq \Gamma \\ G_{\mathfrak{p}} \text{ nicht zyklisch}}} H^2(G_{\mathfrak{p}}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2)},$$

[2]) Die Schurschen Multiplikatoren rechts berechne man mit Satz 25.10 in [7].

wobei $G_\mathfrak{p}$ *die (hier wegen* $G_\mathfrak{p} \subseteq \Gamma$ *durch* $\mathfrak{p}$ *eindeutig festgelegte) Zerlegungsgruppe bezüglich irgendeiner Fortsetzung* $\mathfrak{P}$ *von* $\mathfrak{p}$ *in* L/k *bezeichnet. Insbesondere ist* $J(G,I_L)$ *endlich und man hat sogar*

$$\exp(J(G,I_L))^2 \,\Big|\, |\Gamma|.$$

Der Beweis ist bereits weitgehend vorbereitet. Zunächst heben wir jedoch hervor, daß die beiden letzten Behauptungen klar sind, die letzte wegen Satz 23.9 a) in [7]. Nun zum eigentlichen Beweis: aufgrund der funktoriellen Eigenschaften von J ist dieses mit Produkten vertauschbar; daher hat man unter Benutzung der bereits erläuterten Bezeichnungen wegen $I_L = \bigcup_S I_{L,S}$ mit endlichem S und

$$I_{L,S} = \prod_{\mathfrak{p}\in S} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\mathfrak{p}} L_\mathfrak{P}^\times) \times \prod_{\mathfrak{p}\notin S} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G_\mathfrak{p}} U_\mathfrak{P}),$$

wo $U_\mathfrak{P}$ die Gruppe der $\mathfrak{P}$-lokalen Einheiten von L bezeichnet. Nun bedenken wir, daß für in L/k unverzweigtes $\mathfrak{p}$ der $G_\mathfrak{p}$-Modul $U_\mathfrak{P}$ kohomologisch trivial ist (vgl. etwa Satz (4.3) in [10], II./§ 4.); dies zusammen mit Satz 3. und Lemma 6. sowie Satz 4. und Lemma 6. ergibt für genügend großes S (S enthalte alle die endlich vielen Primstellen mit nicht zyklischem $G_\mathfrak{p}$) zusammen mit „Hilberts Satz 90" (dieser unendlich oft angewandt) die Isomorphie

$$J(G,I_{L,S}) \xrightarrow{\cong} \prod_{\substack{G_\mathfrak{p} \subseteq \Gamma \\ G_\mathfrak{p}\ \textit{nicht zyklisch}}} H^{-1}(G_\mathfrak{p}, L_\mathfrak{P}^\times),$$

wobei das endliche Produkt auf der rechten Seite dann von S unabhängig ist. Jetzt sind wir aber fertig, denn den Rest besorgt die lokale Klassenkörpertheorie (siehe z. B. Satz (5.7) in [10], II./§ 5.) zusammen mit dem Dualitätssatz für Tatesche Kohomologruppen (vgl. Formel (11) in [2], 47.) wegen $H^{-1}(G_\mathfrak{p},L_\mathfrak{P}^\times) \cong H^{-3}(G_\mathfrak{p},\mathbb{Z}) \cong H^2(G_\mathfrak{p},\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Zu guter Letzt folgt noch aus dem Beweisgang zusammen mit Lemma 6. $J_0(G,I_L) = 1$.

§ 10. Bizyklische Diedererweiterungen

G sei vom Diedertyp und Γ sei dabei bizyklisch, d. h. es gebe eine zyklische Untergruppe $\Delta \leqq G$ mit zyklischem $\overline{\Gamma} := \Gamma/\Delta$ (Δ sei dabei im folgenden festgehalten); $\overline{G} := G/\Delta$ ist dann Diedergruppe, und wir wollen in dieser Situation G *vom bizyklischen Diedertyp* nennen. Ist dann L/k Körpererweiterung mit $G = \mathrm{Gal}(L/k)$ vom bizyklischen Diedertyp, so wollen wir L/k fortan kurz eine *bizyklische Diedererweiterung* nennen.

Satz 7. – *Ist* G *vom bizyklischen Diedertyp und* $H^1(g,M) = 0$ *für jede Untergruppe* $g \leqq G$, *so liefert die Deflation (gemäß* (27)) *den Isomorphismus* $J(G,M) \cong J(\overline{G},N_\Delta(M))$, *welcher* J_0 *auf* J_0 *abbildet.*

Dies ist bis auf die letzte Behauptung wegen Satz 1. im Zusammenspiel mit Lemma 4. klar; der Rest folgt aus dem nachfolgenden kommutativen Diagramm – dabei entstehen die exakten Zeilen aus Lemma 1. und der vertikale Isomorphismus rechts aus [4], Lemma 7. wegen $H^{-1}(\Delta,M) \cong H^1(\Delta,M) = 0$ –

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & J_0(G,M) & \longrightarrow & J(G,M) & \longrightarrow & H^{-1}(\Gamma,M) \\ & & \downarrow & & \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ 1 & \longrightarrow & J_0(\bar{G},N_\Delta(M)) & \longrightarrow & J(\bar{G},N_\Delta(M)) & \longrightarrow & H^{-1}(\bar{\Gamma},N_\Delta(M)), \end{array}$$

denn der vertikale Pfeil links ist dann notwendig ein Isomorphismus.

Ist jetzt L/k bizyklische Diedererweiterung und F der Fixkörper von Δ (dann sind sowohl L/F als auch F/K zyklische Erweiterungen), so liefert Satz 7.

Korollar 3. – *Ist* L/k *bizyklische Diedererweiterung, dann hat man*
$J(L/k) \cong J(\bar{G},N_{L/F}(L^\times))$ *und* $J_0(L/k) \cong J_0(\bar{G},N_{L/F}(L^\times))$.

Von besonderem Interesse ist dabei der Spezialfall

(29) $L = F_0F$ *mit einer zyklischen Erweiterung* F_0/K, *wobei* $F_0 \cap F = K$.

Im Zusammenhang mit der schon in § 5. erwähnten Arbeit [9] kann man nämlich in der Situation von (29) die Isomorphie

(30) $PU(L,F,K) \xrightarrow{\cong} J(\bar{G},N_{L/F}(L^\times))$

beweisen, wobei die Gruppe links gemäß der Definition in 5.1 (auf p. 208 der englischen Übersetzung) von [9] zu verstehen ist (der Isomorphismus wird – in der dortigen Terminologie – durch $a \mapsto b$ induziert). Insofern kann also unser J(L/k) in der Situation von (29) (und diese kann ja im bizyklischen Fall durch geeignete Wahl von F immer erreicht werden) als $USK_1(D,\tau)$ (vgl. zu diesem Begriff etwa § 1. in [5]) eines geeigneten Schiefkörpers D mit Involution zweiter Art τ aufgefaßt werden. Außerdem hat man dann in Form von [9], Theorem 5.6 (zusammen mit (30) und Korollar 3.) noch eine andere schöne Kennzeichnung von J(L/k) bei bizyklischen Diedererweiterungen, von der wir hier allerdings keinen Gebrauch machen wollen.

Jetzt setzen wir für den Rest dieses Paragraphen

k *global*

voraus, beginnen jedoch mit einem Hilfssatz, welcher sich nicht nur auf bizyklische Diedererweiterungen bezieht, sondern im Hinblick auf gewisse Erfordernisse in § 12. ein wenig allgemeiner angelegt ist.

Lemma 7. – L/k *sei vom Diedertyp,* k *sei globaler Körper und* F *sei ein über* K *zyklischer Zwischenkörper von* L/K *(insbesondere ist dann* $\bar{G} = \mathrm{Gal}(F/k)$ *Diedergruppe), dann ist* $J(\bar{G},N_{L/F}(L^\times))$ *endlich. Ist zusätzlich auch* L/F *zyklisch (also* L/k *bizyklische Diedererweiterung), so ist die Sequenz*

$$1 \longrightarrow N_{L/F}(L^\times) \longrightarrow N_{L/F}(I_L) \longrightarrow N_{L/F}(C_L) \longrightarrow 1$$

exakt[3]).

[3]) Bezeichnungen wie in §§ 7., 9.

Zum Beweis[4]) beachten wir, daß das Schlangenlemma das nachfolgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten liefert; hierbei ist Δ die Fixgruppe von F (also $\overline{G} = G/\Delta$), $\nu(L/F)$ ist der Scholzsche Knoten von L/F (also die Hindernisgruppe in Bezug auf den Hasseschen Normensatz), und man hat $Y = N_{L/F}(C_L)$ genau dann, wenn $\nu(L/F) = 1$.

(31)
$$\begin{tikzcd}
 & & & & 1 \arrow[d] & \\
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \nu(L/F) \arrow[d] & \\
 & 1 \arrow[r] & N_{L/F}(L^{\times}) \arrow[r] \arrow[d] & F^{\times} \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\Delta,L^{\times}) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & 1 \arrow[r] & N_{L/F}(I_L) \arrow[r] \arrow[d] & I_F \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\Delta,I_L) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
1 \arrow[r] & \nu(L/F) \arrow[r] & Y \arrow[r, "\xi"] \arrow[d] & C_F \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\Delta,C_L) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 1 & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

Also ist mit dem Hasseschen Normensatz der zweite Teil der Behauptung erledigt. Nun zum ersten: mit Lemma 2. braucht natürlich nur die Endlichkeit von $H^1(\overline{G},N_{L/F}(L^{\times}))$ gezeigt zu werden; nun hat aber wegen $H^0(\Delta,C_L) \cong \Delta$ die Gruppe $\mathrm{Im}\xi$ in C_F endlichen Index, d.h. $H^q(\overline{G},\mathrm{Im}\xi)$ ist endlich für jedes $q \in \mathbb{Z}$ (denn dasselbe gilt ja für die $H^q(\overline{G},C_F)$), folglich (wegen der Endlichkeit von $\nu(L/F)$) ebenso $H^q(\overline{G},Y)$. Demnach genügt insgesamt der Nachweis der Endlichkeit von $H^1(\overline{G},N_{L/F}(I_L))$, was mit (27) und Satz 6. in Verbindung mit Lemma 2 auf die Endlichkeit der Gruppen $H^{-1}(T,N_{L/F}(I_L)) \cong H^1(T,N_{L/F}(I_L))$ resp. $H^{-1}(T_{\overline{\gamma}},N_{L/F}(I_L)) \cong H^1(T_{\overline{\gamma}},N_{L/F}(I_L))$ hinausläuft. Letztere sind aber zufolge [4], Lemma 7. homomorphe Bilder der endlichen Gruppen $H^{-1}(H,I_L)$ resp. $H^{-1}(H_\gamma,I_L)$ (hierbei $H := \Delta T$ und $H_\gamma := \Delta T_{\overline{\gamma}}$, wobei $\gamma \in \Gamma$ das Element $\overline{\gamma} \in \overline{\Gamma} = \langle \overline{\gamma} \rangle$ repräsentiert), womit alles bewiesen ist.

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieses Paragraphen:

Satz 8. – k *sei globaler Körper und* L/k *bizyklische Diedererweiterung mit:*

(32) *es gebe eine Primstelle* $\mathfrak{p}$ *von* k *mit* $G_{\mathfrak{p}} = G = \mathrm{Gal}(L/k)$.

Dann induziert $L^{\times} \longrightarrow I_L$ *einen Isomorphismus*

$$\omega\colon J(L/k) \xrightarrow{\cong} J(G,I_L),$$

wobei $J_0(L/k) = 1$.

[4]) Hier und im folgenden machen wir zwanglos von der globalen Klassenkörpertheorie Gebrauch; vgl. dazu etwa [10], III. oder [3], Ch. VII, insbesondere Abschnitt 11.4 auf pp. 198/9 ibid. .

Die Injektivität von ω beinhaltet dabei natürlich ein Hasseprinzip! Zum Beweis betrachten wir das Diagramm (31) im hier vorliegenden Fall; dies bedeutet: $\nu(L/F)=1$ und die rechte Spalte zerfällt sogar – letzteres selbst ohne die Voraussetzung (32), denn das zyklische Δ kommt zufolge des Frobeniusschen Dichtigkeitssatzes (siehe etwa [3], Ch. XI, p. 273 oben) sogar unendlich oft als Zerlegungsgruppe vor –, ferner $Y = N_{L/F}(C_L)$. Nun betrachten wir irgendeine Untergruppe $\bar{g} \leqq \bar{G} = \mathrm{Gal}(F/k)$; da (31) sogar ein Diagramm von $\bar{g}$-Moduln ist, können wir zum Kohomologiediagramm übergehen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
H^0(\bar{g},F^\times) & \longrightarrow & H^0(\bar{g},H^0(\Delta,L^\times)) & \longrightarrow & H^1(\bar{g},N_{L/F}(L^\times)) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
H^0(\bar{g},I_F) & \longrightarrow & H^0(\bar{g},H^0(\Delta,I_L)) & \longrightarrow & H^1(\bar{g},N_{L/F}(I_L)) & \longrightarrow & 1 \\
\downarrow & & \uparrow\downarrow & & \downarrow & & \\
H^0(\bar{g},C_F) & \longrightarrow & H^0(\bar{g},H^0(\Delta,C_L)) & \longrightarrow & H^1(\bar{g},N_{L/F}(C_L)) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
\end{array}$$

Wegen (32) ist oben auch die linke Spalte eine zerfallende kurze exakte Sequenz, wobei man die Zerfällung mit derjenigen der mittleren Spalte kompatibel machen kann. Also gilt:

(33) $1 \longrightarrow H^1(\bar{g},N_{L/F}(L^\times)) \longrightarrow H^1(\bar{g},N_{L/F}(I_L)) \longrightarrow H^1(\bar{g},N_{L/F}(C_L)) \longrightarrow 1$
ist für jede Untergruppe $\bar{g} \leqq \bar{G} = \mathrm{Gal}(F/k)$ *exakt.*

Jetzt fassen wir Lemma 2. (mit G statt G) als Funktor auf der exakten Sequenz aus Lemma 7. auf; wegen (33) führt dies zur Konfiguration des Schlangenlemmas, wobei die zugehörige exakte Sequenz der Kerne lautet:

$$1 \longrightarrow J(\bar{G},N_{L/F}(L^\times)) \longrightarrow J(\bar{G},N_{L/F}(I_L)) \longrightarrow J(\bar{G},N_{L/F}(C_L)).$$

Wegen Satz 5./6./7. sind wir dann fertig, denn obige Sequenz geht dadurch in die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow J(L/k) \xrightarrow{\omega} J(G,I_L) \longrightarrow J(G,C_L) = 1$$

über, wobei $J_0(L/k) \cong J_0(G,I_L) = 1$ (man schließe wie oben, nur mit Lemma 3. statt Lemma 2.).

§ 11. Übergang zu Sylowgruppen

Hier soll eine weitere Analogie zur Tateschen Kohomologietheorie diskutiert werden, nämlich das Pendant zu (A.2) auf p. 79 in [6].

Lemma 8. – Δ_i $(i=1,2)$ *seien abelsch,* $\Gamma := \Delta_1 \times \Delta_2$ *und* $G := \Gamma T$ *vom Diedertyp, also auch* $\bar{G}_i := G/\Delta_i$. *Sind dann* $|\Delta_i|$ *teilerfremd – d. h.* $n_1 \cdot |\Delta_1| + n_2 \cdot |\Delta_2| = 1$

für geeignete n_i –, *so hat man für* G-*Moduln* M *den* J_0 *in die Summe der* J_0 *überführenden Isomorphismus*

$$J(G,M) \xrightarrow{\simeq} J(\overline{G}_1, M^{\Delta_1}) \oplus J(\overline{G}_2, M^{\Delta_2}),$$

wobei die Projektionen auf die Faktoren durch N_{Δ_i} *induziert werden.*

Zum Beweis beachte man zunächst, daß die N_{Δ_i} einen (im allgemeinen nicht surjektiven) Homomorphismus π_i: $J(G,M) \longrightarrow J(\overline{G}_i, M^{\Delta_i})$ induzieren; dies schließt man genauso wie bei (27)[5]. Andererseits induzieren die Einbettungen $M^{\Delta_i} \hookrightarrow M$ Homomorphismen ι_i: $J(\overline{G}_i, M^{\Delta_i}) \longrightarrow J(G,M)$. Also ist es vernünftig, die beiden Homomorphismen

$$\pi_0 := (\pi_1, \pi_2) \text{ und } \iota_0 := \iota_1 \circ n_1 \cdot \mathrm{Id} + \iota_2 \circ n_2 \cdot \mathrm{Id}$$

zu betrachten. Wegen

$$n_1 \cdot N_{\Delta_1}(m) + n_2 \cdot N_{\Delta_2}(m) = (n_1 \cdot |\Delta_1| + n_2 \cdot |\Delta_2|) \cdot m + \sum_{i=1}^{2} \sum_{\delta_i \in \Delta_i} {}^{(\delta_i - 1)} n_i \cdot m$$

folgt zunächst mit (14) $\iota_0 \circ \pi_0 = \mathrm{Id}$, und wegen

$$(n_1 \cdot |\Delta_1| \cdot m_1, n_2 \cdot |\Delta_2| \cdot m_2) = (m_1, m_2) - (|\Delta_2| \cdot n_2 \cdot m_1, |\Delta_1| \cdot n_1 \cdot m_2)$$

folgt schließlich unter Benutzung von (22) (angewandt auf $J(\overline{G}_i, M^{\Delta_i})$) auch noch $\pi_0 \circ \iota_0 = \mathrm{Id}$, d.h. π_0 und ι_0 sind zueinander inverse Isomorphismen. Daß bei alledem J_0 in die direkte Summe der J_0 übergeht, sieht man durch Kombination obigen Beweisganges mit dem von (A.2) auf p.79 in [6] zusammen mit der Definition (23).

Wegen Lemma 8. genügt es bei Untersuchungen von J(G,M) oft, die Fälle „$|\Gamma|$ ungerade" und „$|\Gamma|$ Zweierpotenz" getrennt zu behandeln. Dabei ist wegen (25) und des Zusatzes zu Lemma 1. der erstere vielfach der angenehmere.

§ 12. Diedererweiterungen über globalen Körpern

In diesem abschließenden Paragraphen sei k durchweg globaler Körper.

Satz 9. – *Ist* L/k *Diedererweiterung und* k *globaler Körper, so ist* J(L/k) *stets endlich.*

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach der Anzahl der Erzeugenden von $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$; den Induktionsanfang verkörpert Korollar 1., den Induktionsschluß führt man mittels Lemma 4. unter Benutzung von Lemma 7. ohne Mühe.

Nun das Hauptergebnis dieser Arbeit:

Satz 10. – k *sei globaler Körper und* L/k *Diedererweiterung mit:*

(34) *die 2-Sylowgruppe von* Γ *sei bizyklisch*
und

[5]) Man könnte π_i die Deflation im Sinne von Weiss nennen, während unsere Deflation aus (27) mehr im Sinne von Kuzmin ist; vgl. dazu das auf p.79 ganz unten in [6] Gesagte.

(35) *es gebe eine Primstelle* $\mathfrak{p}$ *von* k *mit* $G_{\mathfrak{p}} = G = \mathrm{Gal}(L/k)$.
Dann induziert $L^{\times} \longrightarrow I_L$ *einen Isomorphismus*

$$\omega : J(L/k) \xrightarrow{\cong} J(G, I_L),$$

wobei $J_0(L/k) = 1$.

Genau wie bei Satz 8. beinhaltet die Injektivität von ω ein Hasseprinzip. Zum Beweis beachten wir zunächst, daß (34) wegen (25) und in Verbindung mit (35) wegen Satz 8. sofort $J_0(L/k) = 1$ impliziert. Faßt man jetzt Lemma 1. als Funktor auf der exakten Sequenz

$$1 \longrightarrow L^{\times} \longrightarrow I_L \longrightarrow C_L \longrightarrow 1$$

auf, so führt dies (da auf dieser Sequenz wegen (35) alle H^q als exakte Funktoren wirken) zur Konfiguration des Schlangenlemmas, wobei die zugehörige exakte Sequenz der Kerne wegen Satz 5./6.

$$1 \longrightarrow J(L/k) \xrightarrow{\omega} J(G, I_L) \longrightarrow 1$$

lautet.

Abschließend noch einige Bemerkungen zu den einschränkenden Annahmen (34) und (35). Erstere stört im Hinblick auf die in § 10. skizzierten Anwendungen im Zusammenhang mit [9] weniger. Mehr schon ist (35) unbefriedigend: aber selbst im Falle „$|\Gamma|$ ungerade“ (dann ist ja (34) gegenstandslos) sind die Auswirkungen des Fallenlassens von (35) verwickelt und führen zu Fragen betreffend gewisse vierte Kohomologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$; dies soll Gegenstand einer späteren Veröffentlichung sein.

Literatur

[1] *I. T. Adamson:* Cohomology Theory for Non-Normal Subgroups and Non-Normal Fields, Proc. Glasgow Math. Assoc. **2** (1954/56), 66–76.

[2] *A. Babakhanian:* Cohomological Methods in Group Theory, Marcel Dekker, New York (1972).

[3] *J. W. S. Cassels* und *A. Fröhlich* (Herausgeber): Algebraic Number Theory, Academic Press, London and New York (1967).

[4] *P. Draxl:* SK_1 von Algebren über vollständig diskret bewerteten Körpern und Galoiskohomologie abelscher Körpererweiterungen, J. reine u. angew. Math. **293/294** (1977), 116–142.

[5] *P. Draxl:* Corps gauches à involution de deuxième espèce, Soc. Math. de France Astérisque **61** (1979), 63–72.

[6] *P. Draxl* und *M. Kneser* (Herausgeber): SK_1 von Schiefkörpern, Lecture Notes in Math. **778**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).

[7] *B. Huppert:* Endliche Gruppen I, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1967).

[8] *V. I. Jančevskiĭ:* Über reduzierte unitäre K-Theorie (russisch), Dokl. Akad. Nauk **229** (1976), 1332–1334 = Soviet Math. Dokl. **17** (1976), 1220–1223.

[9] *V. I. Jančevskiĭ:* Reduzierte unitäre K-Theorie und Schiefkörper über diskret bewerteten Henselkörpern (russisch), Izv. Akad. Nauk **42** (1978), 879–918 = Math. USSR Izv. **13** (1979), 175–213.

[10] *J. Neukirch:* Klassenkörpertheorie, B.I.-Hochschulskripten **713/713a**, Bibliographisches Institut, Mannheim, Wien, Zürich (1969).
[11] *E. Weiss:* Cohomology of Groups, Academic Press, London and New York (1969).
[12] *H. Zassenhaus:* The Theory of Groups (2nd ed.), Chelsea, New York (1958).